Zoekersrubriek

Arne Smeets   Christophe Debry

Woord vooraf

Als nieuwe redacteurs van de zoekersrubriek wensen wij – bij het verschijnen van de eerste volledige zoekersrubriek van onze hand – hulde te brengen aan René Laumen. Gedurende vele jaren heeft hij op inspirerende wijze zorg gedragen voor deze rubriek. Een lange reeks prachtige zoekers is daarbij de revue gepasseerd. Wij zullen ons uiterste best doen om waardige opvolgers te zijn – voorwaar geen gemakkelijke opgave. Wij rekenen daarvoor ook op talrijke inzendingen van de trouwe zoekersvrienden. De start is goed, want we waren alvast tevreden met de inzendingen voor de opgaven uit nummer I47 van dit tijdschrift !

We doen tevens ons best om zoekers aan te brengen die voor een breed publiek toegankelijk zijn en zonder te veel technische bagage kunnen worden opgelost. We hopen dat de zoekers hier en daar zullen dienen als interessant materiaal voor in het klaslokaal ; naar onze inschatting kan er met de tweede nieuwe zoeker van deze editie (in vereenvoudigde vorm) zelfs iets worden gedaan in de eerste graad van het middelbaar onderwijs ! Ook de andere opgaven lijken ons potentieel bruikbaar (maar dan in de hogere jaren).

Oplossingen van de zoekers uit W & O 147

Opgave 1

De eerste zoeker was een opgave uit de klassieke vlakke meetkunde en luidde als volgt :

Zij ΔABC *een gelijkzijdige driehoek. Zijn* P, Q, R *en* S *punten op de zijden* $[AB]$, $[AC]$, $[AC]$ *en* $[BC]$ *respectievelijk, zodanig dat* Q *tussen* A *en* R *ligt en zodanig dat* $|AP|+|AQ|=|BP|+|QR|+|BS|=|CR|+|CS|$. *Bepaal de grootte van de scherpe hoek die gevormd wordt door de twee rechten* PR *en* QS.

Van deze opgave bestaan een aantal oplossingen – variaties op hetzelfde thema – die weinig meer gebruiken dan de bekende congruentiekenmerken van driehoeken. We presenteren hieronder één van deze oplossing.

Oplossing (naar I. Verstuyft)

Zij $s=|AB|=|BC|=|CA|$.

Omdat

$$\begin{aligned}(|AP|+|AQ|)+(|BP|+|QR|+|BS|)+(|CR|+|CS|)\\ &=(|AP|+|BP|)+(|BS|+|CS|)+(|AQ|+|QR|+|CR|)\\ &=|AB|+|BC|+|CA|\\ &=3s\end{aligned}$$

vinden we dat

$$|AP|+|AQ|=|BP|+|QR|+|BS|=|CR|+|CS|=s.$$

Hieruit volgt onder andere dat

$$|AP|+|AQ|=s=|AP|+|BP|,$$

dus

$$|AQ|=|BP|,$$

en

$$|CR|+|CS|=|BS|+|CS|,$$

dus

$$|CR|=|BS|.$$

Zij O het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\Delta\ ABC$.

We bekijken nu de rotatie om O die A, B en C afbeeld op C, A en B respectievelijk.

Omdat $|BP|=|AQ|$ zal deze rotatie P op Q afbeelden.

Omdat $|CR|=|BS|$ zal R op S worden afgebeeld.

Bijgevolg wordt de rechte PR afgebeeld op de rechte QS.

Daaruit volgt direct dat de scherpe hoek die gevormd wordt door deze rechten gelijk moet zijn aan $60°$.

Opmerkingen

- Een aantal zoekersvrienden presenteerde een oplossing die gebaseerd is op een mix van analytische en goniometrische berekeningen (G. Moens, D. Tant en A. Verroken). In elk van deze oplossingen werd aangetoond dat de tangens van de scherpe hoek tussen de twee rechten gelijk is aan $\sqrt{3}$.
- Zoekersvriend Maassen observeerde dat de opgave licht kan worden veralgemeend door te werken met *georiënteerde lengten*. Door de gegeven gelijkheden van lengten te vervang-en door geschikte gelijkheden van georiënteerde lengten kan worden aangetoond dat de conclusie van de opgave ook nog blijft gelden indien sommige (of alle) van de punten P, Q, R en S niet meer op de zijden van de driehoek liggen (maar uiteraard wel op de dragers van de zijden).

Correcte oplossingen vanwege :

S. Cambie (Poperinge), A. J. Th. Maassen (Milsbeek, Nederland), G. Moens (Belsele), D. Plessers (Neerpelt), D. Tant (Oedelem), D. Vanslembrouck (Gent), A. Verroken (Sint Amandsberg) en I. Verstuift (Deurne).

Opgave 2

We herhalen nog even de opgave van de tweede zoeker, een vermakelijk “spelletje” :

Zij N een gegeven natuurlijk getal (verschillend van 0). Twee spelers – die we A en B noemen – spelen een spel met $2N$ kaarten. Op elk van de kaarten staat een reëel getal. De kaarten worden op een rij gelegd en de getallen zijn voor beide spelers zichtbaar. Om de beurt mogen A en B een kaart uit de rij nemen, tot er geen kaarten meer overblijven, maar ze moeten wel telkens één van de twee kaarten aan de uiteinden van de rij kiezen. Speler A mag beginnen. Aan het einde van het spel hebben beide spelers dus N kaarten in hun handen. Laat zien dat speler A er altijd voor kan zorgen dat de som van de getallen op zijn kaarten minstens zo groot is als de som van die getallen op de kaarten van speler B.

Oplossing (naar D. Vanslembrouck)

Zij a_i het getal op de *i*-de kaart.

We mogen zonder verlies van de algemeenheid aannemen dat de ongelijkheid

$$a_1 + a_3 + ... + a_{2N-1} \geq a_2 + a_4 + ... + a_{2N}$$

geldt – indien niet, dan kunnen we de rij in de omgekeerde volgorde lezen.

Speler A kiest de kaart met het getal a_i.

Speler B moet dus de kaart met het getal a_2 of de kaart met het getal a_{2N} kiezen.

Speler A kiest vervolgens de kaart met het getal a_3 in het eerste geval en de kaart met het getal a_{2N-1} in het tweede geval.

Deze procedure wordt verdergezet : speler A kiest dus steeds de kaart naast de laatste kaart die B gekozen heeft.

Zo zorgt A er voor dat hij altijd een kaart kiest met oneven nummer, en verhindert hij B zo’n kaart kan kiezen.

Bijgevolg eindigt A dankzij deze strategie altijd met een som die minstens even groot is als de som die B bekomt.

Opmerking

De oplossing van deze zoeker vereist helemaal geen technische bagage – scherp redeneervermogen is voldoende. Alle correcte inzendingen waren gebaseerd op dezelfde strategie.

Correcte oplossingen :

S. Cambie (Poperinge), A. J. Th. Maassen (Milsbeek, Nederland), D. Plessers (Neerpelt), D. Tant (Oedelem), D. Vanslembrouck (Gent), A. Verroken (Sint Amandsberg) en I. Verstuyft (Deurne).

Opgave 3

De laatste (en meest pittige) opgave uit de zoekersrubriek van W & O 147 was de volgende :

Bestaan er veeltermen $f(X)$ en $g(X)$ met gehele coëfficiënten die aan de volgende twee *eigenschappen voldoen ?*

- *Zowel* $f(X)$ *als* $g(X)$ *heeft een coëfficiënt die groter is dan* 2011.
- *Elke coëfficiënt van het product* $f(X)g(X)$ *is gelijk aan* -1 , 0 *of* 1.

Consrueer dergelijke veeltermen $f(X)$ *en* $g(X)$*, of bewijs dat ze niet kunnen bestaan.*

Oplossing (van de redacteurs)

Dergelijke veeltermen bestaan !

Definieer voor elk natuurlijk getal n de veeltermen

$$f_n(X) = (X-1)^{n+1}$$

en

$$g_n(X) = \prod_{i=0}^{n} \frac{X^{2^i}-1}{X-1} = \prod_{i=0}^{n}\left(X^{2^i-1} + X^{2^i-2} + \ldots + X^2 + X + 1\right).$$

We merken eerst op dat voor elke n geldt dat in het product $f_n(X)g_n(X)$ elke coëfficiënt gelijk is aan -1 , 0 of 1.

Immers, het product $f_n(X)g_n(X)$ is gelijk aan $\prod_{i=0}^{n}\left(X^{2^i}-1\right)$.

Uit het feit dat elk natuurlijk getal een unieke binaire schrijfwijze heeft, volgt dat elke macht X^{ℓ} met $0 \le \ell \le 2^{n+1}-1$ precies één keer zal voorkomen wanneer in dit product de haakjes worden uitgewerkt, en wel met coëfficiënt ± 1.

Anderzijds geldt :

- Voor voldoende grote n heeft $f_n(X)$ een coëfficiënt die groter is dan 2011. Inderdaad, enig opzoekwerk in de driehoek van Pascal leert ons dat dit reeds het geval is voor $n \ge 13$.
- Voor elke n is de coëfficiënt van X in $g_n(X)$ gelijk aan n (eenvoudige observatie). In het bijzonder heeft voor elke $n \ge 2012$ de veelterm $g_n(X)$ een coëfficiënt die strikt groter is dan 2011.

Bijgevolg voldoen de veeltermen $f_n(X)$ en $g_n(X)$ voor voldoende grote waarden van n – bijvoorbeeld voor alle $n \ge 2012$ – zeker aan de voorwaarde uit de opgave, en daarmee is bewezen dat dergelijke veeltermen bestaan.

Opmerkingen

- Bestaande constructie lijkt eenvoudig, maar is dat niet. Een aantal zoekersvrienden waren ervan overtuigd dat dergelijke veeltermen zeker niet konden bestaan en deden ook pogingen om dat te bewijzen.
- Zoekersvrienden Tant en Verroken (die de enige twee correcte oplossingen instuurden) schreven zeer leesbare teksten waarin ze heel expliciet dergelijke veeltermen construeren, met meer gedetailleerde informatie over de coëfficiënten dan in bovenstaande oplossing. Zoekersvriend Tant merkte tevens op dat het getal 2011 in de opgave kan worden vervangen door eerder welk (willekeurig groot) natuurlijk getal.

Correcte oplossingen :

D. Tant (Oedelem) en A. Verroken (Sint Amandsberg).

Nieuwe zoekers

Ziehier de nieuwe zoekers (niet noodzakelijk gerangschikt in volgorde van moeilijkheids- graad !) :

1. Zijn Γ_1 en Γ_2 cirkels (in het vlak) die elkaar in twee punten snijden. Beschouw de gemeenschappelijke raaklijnen ℓ_1 en ℓ_2 aan deze cirkels. De rechte die het raakpunt van Γ_1 en ℓ_1 verbindt met het raakpunt van Γ_2 en ℓ_2 bepaalt koorden in Γ_1 en Γ_2.

   Laat zien dat deze twee koorden even lang zijn.

2. *René heeft een kapot rekentoestel : de enige toetsen die nog functioneren zijn de haakjes, √, =, -, 1/x en π. Zij $F(X)$ een willekeurige veelterm met rationale coëfficiënten.*

   Laat zien dat René het getal $F(\pi)$ kan bekomen als uitkomst van een geldige bewerking op zijn rekentoestel.

3. *Zij n een willekeurig natuurlijk getal en bekijk de veelterm $X^{n+1} + X^n$. Deze veelterm mag worden afgeleid naar X of vermenigvuldigd met $X+1$ – in willekeurige volgorde en een willekeurig aantal keren – tot het resultaat een veelterm van de eerste graad is.*

   Bewijs dat voor elke veelterm $aX+b$ met $a,b \in \mathbb{Z}$ die zo kan worden bekomen zal gelden dat $a-b$ deelbaar is door n^2.

Veel zoekgenot !

Inzendingen ten laatste op 1 april 2012 (nee, dit is geen grap...).

Oplossingen naar

E-mail : arne.smeets@wis.kuleuven.be of christophe.debry@wis.kuleuven.be.

Post :Arne Smeets, Departement Wiskunde (01.31), Celestijnenlaan 200B, 3001 Heverlee.