Uit de klas geklapt...

Hugo Staelens

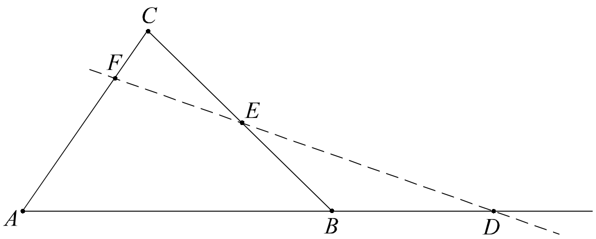
■ In de finale van de Vlaamse Wiskunde Olympiade 2010-2011 werd een vraag gesteld die onmiddellijk doet denken aan de **Stelling van Menelaos**.

Er is weinig met zekerheid geweten over Menelaos. Hij stond bekend als ***Menelaos van Alexandrië*** en dus denkt men dat hij in die Egyptische stad geboren is, waarschijnlijk rond het jaar 70 van onze jaartelling. Dat hij daarna in Rome verbleef, blijkt uit een werk van Plutarchus die hem naar eigen zeggen ontmoet heeft. Menelaos stierf rond het jaar 130.

Hoewel in talloze Arabische geschriften naar boeken van Menelaos verwezen wordt, is er maar één boek van hem bewaard gebleven : *Sphaerica*, een werk over boldriehoeksmeting waarin hij een boldriehoek definieert als het deel van een sfeer begrensd door drie bogen van grote cirkels, waarbij een boog minder dan een halve grote cirkel moet zijn. In dat boek komt de Stelling van Menelaos voor betreffende boldriehoeken.

Vertaald naar de vlakke meetkunde luidt de stelling (Figuur 1) :

Als een rechte de drie zijlijnen van een driehoek snijdt, dan is het product van de maatgetallen van de drie niet-aanliggende lijnstukken, gelijk aan het product van de maatgetallen van de drie overblijvende lijnstukken.



Figuur 1

$$|AD|\cdot|BE|\cdot|CF| = |BD|\cdot|EC|\cdot|FA|$$

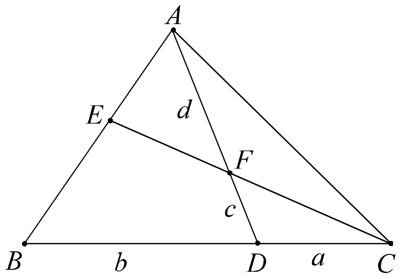
In onze tijd is de Stelling van Menelaos beter bekend in volgende gedaante :

De punten D, E, F op de respectieve zijlijnen AB, BC, CA van een driehoek ABC zijn collineair als en slechts als $\dfrac{|AD|}{|BD|}\cdot\dfrac{|BE|}{|EC|}\cdot\dfrac{|CF|}{|FA|} = 1.$

De rechte DEF wordt transversaal van de driehoek ABC genoemd.

We gaan nu naar de vraag uit de Vlaamse Wiskunde Olympiade 2010-2011 (W&O, nr. 147, vraag 4, p. 259) :

Gegeven is een driehoek ABC *en punten* D *en* E *, respectievelijk op* $]BC[$ *en* $]AB[$. F *is het snijpunt van de rechten* AD *en* CE*. We stellen* $|CD| = a$ *,* $|BD| = b$ *,* $|DF| = c$ *,* $|AF| = d$*. Bepaal de verhouding* $\dfrac{|BE|}{|AE|}$ *in functie van* a *,* b *,* c *en* d (Figuur 2).



Figuur 2

Pas de Stelling van Menelaos toe op driehoek BDA met de rechte CE als transversaal :

$$|BC| \cdot |DF| \cdot |AE| = |DC| \cdot |FA| \cdot |EB|$$

of

$$(a+b) \cdot c \cdot |AE| = a \cdot d \cdot |EB|$$

waaruit volgt

$$\frac{|EB|}{|AE|} = \frac{c(a+b)}{ad}.$$

*

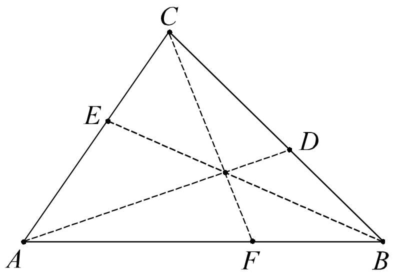
*   *

Wie zegt “Stelling van Menelaos”, denkt ook onvermijdelijk aan “Stelling van Ceva”.

Giovanni Ceva (1647 - 1734) is een Italiaans wiskundige. Hij was professor wiskunde aan de universiteit van Mantua. Ceva’s werk oriënteerde zich vooral op de meetkunde. Ceva herontdekte en publiceerde ook de stelling van Menelaos. Daar waar de stelling van Menelaos handelt over het collineair zijn van drie punten op de respectieve zijlijnen van een driehoek, zegt de stelling van Ceva onder welke voorwaarde drie rechten uit de hoekpunten van een driehoek naar de overstaande zijden, concurrent zijn. Ceva publiceerde de stelling in zijn boek *De lineis rectis* uit 1678.

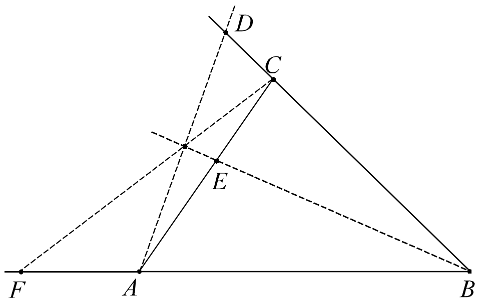
De **Stelling van Ceva** luidt (Figuur 3) :

Drie punten D *,* E *,* F *respectievelijk gelegen op de zijden* $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ *van een driehoek* ABC *zijn concurrent als en slechts als* $\dfrac{|AF|}{|BF|} \cdot \dfrac{|BD|}{|CD|} \cdot \dfrac{|CE|}{|AE|} = 1$.



Figuur 3

Ten slotte leggen we nog de nadruk op het feit dat zowel de Stelling van Menelaos als die van Ceva, gelden voor de *zijlijnen* van een driehoek en dus niet alleen voor de *zijden*. Ook in onderstaande Figuur 4 bijvoorbeeld geldt de Stelling van Ceva, evenzeer als in Figuur 3.



Figuur 4

(*Historische gegevens over Menelaos en Ceva: naar J. J. O'Connor en E. F. Robertson*)

■ Onderstaande foto (Figuur 5) werd tijdens de zomer 2011 genomen in de Italiaanse stad Ferrara in de binnenkoer van het Castello Estense. Hij illustreert hoe bollen kunnen opeengestapeld worden in de vorm van een regelmatige piramide.

Figuur 5

We verwijzen hierbij naar de piramidale getallen, besproken in W&O, nr. 146, p. 182.

■ ***Huybrechtskalender*** voor het eerste kwartaal 2012 : we kiezen de datum 14 januari.

- 14 januari 1902 is de geboortedatum van de Poolse wiskundige **Alfred Tarski** (Warschau 1902 - Berkeley, Californië 1983).

  Tot 1923 heette hij Alfred Teitelbaum. Samen met zijn broer veranderde Alfred dan zijn naam in Tarski én bekeerden ze zich beiden tot de katholieke godsdienst. Het deel van Polen waarin Warschau zich bevond, was in 1915 bevrijd van het Russische juk, Polen werd een koninkrijk en het nationalisme begon aan een steile opgang. Dit bracht echter eveneens een sfeer van anti-semitisme voort en dit alles verklaart wellicht de ommezwaai bij de joodse broers Teitelbaum.

  Alfred Tarski groeide op in een welvarend gezin. Hij deed zijn middelbaar onderwijs in een school voor kinderen van intellectuelen. Op die manier kreeg hij een veel bredere opleiding dan in een gewone school: behalve de gewone humanioravakken studeerde hij nog Russisch, Duits, Frans, Grieks en Latijn.

  Rond 1919 studeert Alfred Tarski logica bij Lesniewski aan de universiteit van Warschau. Deze overhaalde hem om niet verder te gaan met biologie maar wel wiskunde te studeren. Zijn eerste artikel publiceerde hij in 1921 op 19-jarige leeftijd. Sindsdien ging zijn voorkeur uit naar de theorie van de verzamelingen. In 1924 behaalde Tarski zijn doctoraat, de jongste die ooit aan de universiteit van Warschau de graad van doctor in de wiskunde verwierf. Vanaf dat moment begon hij verder te bouwen aan de theorie van de verzamelingen die reeds door Cantor, Zermelo en Dedekind ontwikkeld was. Samen met Banach schreef hij een artikel over wat nu bekend staat als de *Banach-Tarski Paradox*.

  Dit was een schitterende aanloop naar zijn latere carrière :

  1922 - 25 : docent logica aan het Pools Pedagogisch Instituut in Warschau

  1925 - 39 : aangesteld als professor wiskunde en logica aan de universiteit van Warschau, tegelijkertijd leraar wiskunde aan het Zeromski Lyceum in Warschau

  1930 : lector aan de universiteit van Wenen

  1933 : publicatie van *The concept of truth in formalized languages*

  1935 : aan de universiteit van Wenen

  1936 : publicatie van *On the concept of logical consequence*

  1937 : een artikel over de deductieve methode

  1939 : aan Harvard University in de VS

  Toen in augustus 1939 Tarski twee weken in de VS was, viel Hitler Polen binnen. Tarski kreeg toelating om in de VS te blijven. Hij trachtte van daaruit zijn vrouw en twee kinderen uit Polen te laten overkomen, maar die pogingen mislukten. Gelukkig overleefden ze de Nazibezetting en konden ze hem in Amerika vervoegen in 1946. Naaste familie echter overleefde het getto van Warschau niet : zijn beide ouders, broer en schoonzuster werden door de Nazi's gedood.

  In de VS zette Tarski de opmars van zijn carrière verder :

1939 - 41 : Harvard University

1940 : City College of New York

1941 - 42 : Institute for Advanced Study, Princeton University

1942 : eindelijk een vaste job aan de University of California at Berkeley

1945 : associate professor in Berkeley

1949 : Professor of Mathematics in Berkeley

1968 : professor-emeritus van Berkeley

Hoewel gepensioneerd, gaf Tarski toch nog les in Berkeley tot 1973. Dat Tarski een bedrijvig man was, moge blijken uit volgende korte "uitstappen" naar andere hogescholen of instituten :

1950 : lector aan University College London

1955 : lector aan het Henri Poincaré Instituut in Parijs

1958 - 60 : onderzoeker aan het Miller Institute of Basic Research in Science

1966 : lector aan University College London

1967 : professor filosofie aan University of California at Los Angeles

1974 - 75 : aan de katholieke universiteit van Chili

Alfred Tarski leverde belangrijke bijdragen aan de wiskunde : verzamelingenleer, maattheorie, topologie, meetkunde, algebra, algebraïsche logica, formele logica, metamathematica.

Eerbetuigingen :

* Tarski wordt internationaal erkend als een van de vier grootste logici aller tijden, samen met Aristoteles, Frege en Gödel.
* Lid van de *National Academy of Sciences* (London)
* Lid van de *Koninklijke Nederlandse Academie voor Letteren en Wetenschappen*
* Lid van de *British Academy*
* Honorary Editor van *Algebra Universalis*
* 1944 - 46 : Voorzitter van de *Association for Symbolic Logic*
* 1956 - 57 : Voorzitter van de *International Union for the History and Philosophy* Science
* Eervolle onderscheidingen van de katholieke universiteit van Chili (1975) en de universiteit van Marseille (1977)
* 1981 : *Berkeley Citation* van de University of California

(*naar J. J. O'Connor en E. F. Robertson*)

• 14 is een element van een *Maris-Mc Gwire-Sosa-getallenpaar*.

Definities :

1. *De **Maris-Mc Gwire-Sosa-som** van een natuurlijk getal* a *is de som van de cijfers van* a *plus de som van de cijfers van de priemfactoren van* a.

2. *Een getallenpaar* $\{a\ ,b\}$ *is een* ***Maris-Mc Gwire-Sosa-getallenpaar*** *als en slechts als* a *en* b *opeenvolgende natuurlijke getallen zijn waarbij* a *en* b *dezelfde Maris-Mc Gwire-Sosa-som hebben.*

Voorbeelden :

$$* \{14\ ,15\} \text{ omdat } \left[\begin{array}{l} 14 = 2\cdot 7 \text{ en } (1+4)+(2+7)=14 \\ 15 = 3\cdot 5 \text{ en } (1+5)+(3+5)=14 \end{array}\right.$$

$$* \{50\ ,51\} \text{ omdat } \left[\begin{array}{l} 50 = 2\cdot 5^2 \text{ en } (5+0)+(2+5)=12 \\ 51 = 1\cdot 51 \text{ en } (5+1)+(5+1)=12 \end{array}\right.$$

Let op : 1 is geen priemgetal !

- Mark Mc Gwire en Sammy Sosa zijn twee Amerikaanse baseballers die beiden in 1998 met 62 “home runs” het legendarische record 61 “home runs” – toevallig uit 1961 – van Roger Maris verbeterden. Het hierboven gedefinieerde getallenpaar werd naar hen genoemd omdat het paar $\{61\ ,62\}$ aan de definitie beantwoordt :

$$\left[\begin{array}{l} 61 = 1\cdot 61 \text{ en } (6+1)+(6+1)=14 \\ 62 = 2\cdot 31 \text{ en } (6+2)+(2+3+1)=14 \end{array}\right.$$

- Nog andere voorbeelden : $\{7\ ,8\}$, $\{43\ ,44\}$, $\{63\ ,64\}$, $\{67\ ,68\}$, $\{80\ ,81\}$, ...
- Het hierboven gedefinieerde getallenpaar wordt ook kortweg “home run”-paar genoemd. Er bestaan eveneens “home run”-drietallen, viertallen, vijftallen, ...

  Bijvoorbeeld :
  $\{212\ ,213\ ,214\}$, $\{8126\ ,8127\ ,8128\ ,8129\}$, $\{241995\ ,241996\ ,...,241999\}$.

- Op 14 januari 1970 overleed in New York de Kroatische wiskundige **William Feller** (Zagreb 1906 - New York 1970).

Feller studeerde aan de universiteit van Zagreb. In 1926, amper 20 jaar oud, slaagde hij voor zijn doctoraat aan de universiteit van Göttingen waar hij les kreeg van Hilbert en Courant. In 1928 neemt hij de leiding van het laboratorium voor toegepaste wiskunde in Kiel.

In 1933, toen Hitler in Duitsland aan de macht kwam, ging hij in Kopenhagen werken. In 1934 gaat hij naar Stockholm. In 1939 wijkt hij samen met zijn vrouw uit naar de VS waar hij associate professor of mathematics wordt aan Brown University, Providence, Rhode Island. In hetzelfde jaar wordt hij ook de eerste executive editor van het blad Mathematical Reviews waarvan hij medestichter was. In 1944 wordt Feller professor aan Cornell University. In 1950 wordt hij aangesteld als professor wiskunde aan Princeton University.

William Feller’s belangrijkste bijdrage tot de wiskunde situeert zich in de waarschijnlijkheidsleer. Ook de wiskundige theorie van de Brown’se beweging bracht hem veel aanzien in wetenschappelijke kringen. Zijn voornaamste werk is *Introduction to Probability Theory and its Applications* (1950 - 1961).

Eerbetuigingen :

* 1950 : spreker op het *International Congress of Mathematicians in Cambridge*, Massachusetts
* 1966 : visiting professor aan de *Rockefeller University*
* Lid van de *Royal Statistical Society* (Engeland)
* Lid van de *National Academy of Sciences* (VS)
* Lid van de *American Academy of Arts and Sciences*
* De *National Medal for Science* werd hem in 1969 toegekend, maar nog vóór de overhandiging begin 1970, stierf hij. Zijn vrouw mocht de medaille in ontvangst nemen.

(*naar J.J.O'Connor en E.F. Robertson*)

■ Markante uitspraak

* ***Hans Freudenthal*** :

Er is een wiskundig denken – ik ben er van overtuigd – dat niet alleen onze relatie met de fysieke wereld en allerlei werktuigen en toestellen die men maakt, bepaalt, maar ook onze menselijke relaties, zowel individueel als internationaal en interraciaal.

Bijdragen en opmerkingen naar volgend adres : Hugo Staelens <hagenhof@telenet.be>
Beneluxstraat 1, 9900 Eeklo.
Tel. : 093 776 545

Stellingen van Menelaos en Ceva in het affien vlak

Zijn a , b en c drie verschillende collineaire punten van het affien vlak A_2 dan geldt :

$\overrightarrow{ac} = k\overrightarrow{bc}$ met $k \in \mathbb{R}$.

Dit reëel getal k noemen we de deelverhouding van c t.o.v. het koppel (a, b) en we noteren dat $(a, b, c) = k$.

- **Stelling van Menelaos in het affien vlak** :

  Liggen de punten a_1 , a_2 en a_3 respectievelijk op de zijden p_2p_3, p_3p_1 en p_1p_2 van driehoek $p_1p_2p_3$ dan geldt :

  $$a_1 ,\ a_2 \text{ en } a_3 \text{ zijn collineair} \Leftrightarrow (p_1, p_2, a_3)(p_2, p_3, a_1)(p_3, p_1, a_2) = 1.$$

- **Stelling van Ceva in het affien vlak** :

  Als drie hoektransversalen van driehoek $p_1p_2p_3$ de respectieve zijden p_2p_3, p_3p_1 en p_1p_2 snijden in a_1 , a_2 en a_3 dan geldt :

  $$p_1a_1 ,\ p_2a_2 \text{ en } p_3a_3 \Leftrightarrow (p_1, p_2, a_3)(p_2, p_3, a_1)(p_3, p_1, a_2) = -1.$$
