Schijnbaar gelijkbenige driehoeken

Jos De Schryver

De buitenbissectorlengten van een driehoek

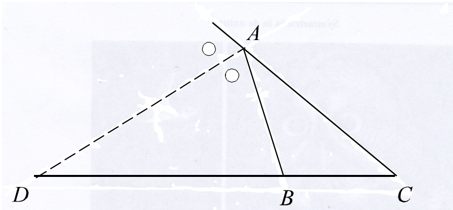
We identificeren een hoek met zijn unieke radiaalmaat in $]-\pi\,,\pi]$.

Met een driehoek bedoelen we steeds een georiënteerde driehoek.

Een driehoek ABC wordt positief genoemd als en slechts als ten minste één van zijn hoeken $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$ tot $[0\,,\pi]$ behoort.

Alle hoeken van een positieve driehoek behoren tot $]0\,,\pi[$.

de som van de hoeken van een positieve driehoek is gelijk aan π.



Beschouw een driehoek ABC die niet gelijkbenig met top A is.

De buitenbissectrice van de driehoek ABC in het hoekpunt A snijdt de rechte BC in een punt D. Dit punt D noemen we het buitenbissectorpunt van de driehoek ABC tegenover het hoekpunt A en de afstand $|AD|$ noemen we de buitenbissectorlengte van de driehoek ABC in het hoekpunt A.

We beschouwen een positieve driehoek ABC met hoeken

$$\alpha = \widehat{BAC}\ ,\ \beta = \widehat{CBA}\ ,\ \gamma = \widehat{ACB}.$$

Stelling 1

Laat R de straal van de omgeschreven cirkel van de driehoek ABC zijn.

1.1 Als de driehoek ABC niet gelijkbenig met top A is, dan is de buitenbissectorlengte van deze driehoek in het hoekpunt A gelijk aan

$$2R\cdot\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\left|\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\right|}$$

1.2 Als de driehoek ABC niet gelijkbenig met top B is, dan is de buitenbissectorlengte van deze driehoek in het hoekpunt B gelijk aan

$$2R\cdot\frac{\sin\gamma\cdot\sin\alpha}{\left|\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\right|}$$

1.3 Als de driehoek ABC niet gelijkbenig met top C is, dan is de buitenbissectorlengte van deze driehoek in het hoekpunt C gelijk aan

$$2R \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\left|\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right|}$$

□ We bewijzen bijvoorbeeld 1.1

De driehoek ABC is niet gelijkbenig met top A als en slechts als $\beta \neq \gamma$.

Onderstel bijvoorbeeld $\beta > \gamma$.

Volgens de sinusregel, toegepast in de driehoek ABC, geldt $|AB| = 2R \cdot \sin\gamma$.

Laat D het buitenbissectorpunt van de driehoek ABC tegenover het hoekpunt A zijn.

We hebben

$$\angle DAB = \frac{\beta+\gamma}{2}, \ \angle ABD = \pi - \beta, \ \angle BDA = \frac{\beta-\gamma}{2}.$$

Volgens de sinusregel, toegepast in de driehoek ADB, geldt nu

$$|AD| = |AB| \cdot \frac{\sin(\pi-\beta)}{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}} = 2R \cdot \frac{\sin\beta \cdot \sin\gamma}{\left|\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\right|}.$$

Hetzelfde resultaat wordt verkregen als $\beta < \gamma$ en daarmee is 1.1 bewezen.

Analoog voor 1.2 en 1.3. □

Stelling 2

Onderstel dat de driehoek ABC niet gelijkzijdig is.

2.1 Als de driehoek ABC gelijkbenig met top A is, dan zijn de buitenbissectorlengten van deze driehoek in de hoekpunten B en C gelijk.

2.2 Als de driehoek ABC gelijkbenig met top B is, dan zijn de buitenbissectorlengten van deze driehoek in de hoekpunten C en A gelijk.

2.3 Als de driehoek ABC gelijkbenig met top C is, dan zijn de buitenbissectorlengten van deze driehoek in de hoekpunten A en B gelijk.

□ Als de driehoek ABC gelijkbenig is met top A, maar niet gelijkzijdig, dan hebben we $\beta = \gamma \neq \alpha$ en hiermee volgt 3.1 onmiddellijk uit 1.2 en 1.3.

Analoog voor 2.2 en 2.3. □

Kenmerken van schijnbare gelijkbenigheid

Een driehoek ABC wordt schijnbaar gelijkbenig met top A, resp. B, resp. C genoemd als en slechts als deze driehoek ongelijkbenig is en zijn buitenbissectorlengten in de hoekpunten B en C, resp. C en A, resp. A en B toch gelijk zijn.

Voor een ongelijkbenige positieve driehoek ABC met hoeken $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle CBA$, $\gamma = \angle ACB$ behandelen we enkele kenmerken van schijnbare gelijkbenigheid met top A.

We laten het over aan de lezer om analoge kenmerken van schijnbare gelijkbenigheid met top B, resp. C te formuleren.

Stelling 3

De driehoek ABC is schijnbaar gelijkbenig met top A als en slechts als

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}.$$

□ Laat

$$u = \sin\frac{\alpha}{2}, \quad v = \sin\frac{\beta}{2}, \quad w = \sin\frac{\gamma}{2}.$$

Omdat $\alpha, \beta, \gamma \in \left]0, \pi\right[$ gelden $u > 0$, $v > 0$, $w > 0$.

Omdat de driehoek ABC ongelijkbenig is, hebben we daarbij $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$ en dus ook $u \neq v \neq w \neq u$.

Zoals blijkt uit 1.2 en 1.3 is de driehoek ABC schijnbaar gelijkbenig met top A als en slechts als

$$\sin\beta \cdot \left|\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\right| = \sin\gamma \cdot \left|\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right|. \quad (*)$$

Er valt aan te tonen dat deze gelijkheid (*) gelijkwaardig is met $u^2 = vw$.

We hebben $\cos\frac{\beta}{2} = \sin\frac{\gamma+\alpha}{2}$ (want $\alpha + \beta + \gamma = \pi$),

$$\begin{aligned}
\sin\beta \cdot \sin\frac{\gamma-\alpha}{2} &= 2\sin\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma-\alpha}{2} \\
&= 2\sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma+\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\gamma-\alpha}{2} \\
&= 2\sin\frac{\beta}{2}\left(\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right) \\
&= 2\sin\frac{\beta}{2}\left(\sin^2\frac{\gamma}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\gamma}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) \\
&= 2\sin\frac{\beta}{2}\left(\sin^2\frac{\gamma}{2}\left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) - \left(1 - \sin^2\frac{\gamma}{2}\right)\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) \\
&= 2\sin\frac{\beta}{2}\left(\sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right).
\end{aligned}$$

Dus

$$\sin\beta\cdot\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}=2v\left(w^2-u^2\right).$$

Analoog geldt

$$\sin\gamma\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=2w\left(u^2-v^2.\right)$$

Met behulp van de laatste twee gelijkheden zien we dat

$$\begin{aligned}
\text{gelijkheid (*)} \quad &\Leftrightarrow \quad v\left(w^2-u^2\right)=w\left(u^2-v^2\right) \quad \text{of} \quad v\left(w^2-u^2\right)=w\left(v^2-u^2\right)\\
&\Leftrightarrow \quad \left(u^2-vw\right)\left(v+w\right)=0 \quad \text{of} \quad \left(u^2+vw\right)\left(v-w\right)=0\\
&\Leftrightarrow \quad u^2=vw \quad \text{of} \quad v=-w \quad \text{of} \quad u^2=-vw \quad \text{of} \quad v=w\\
&\Leftrightarrow \quad u^2=vw \quad (\text{omdat } v>0\text{, } w>0 \text{ en } v\neq w),
\end{aligned}$$

wat te bewijzen was. □

F1 : We noemen S de transformatie van $\mathbb{R}$, bepaald door

$$S(x)=2\sin^2\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2} \quad \text{voor alle } x\in\mathbb{R}.$$

Stelling 4

De driehoek ABC is schijnbaar gelijkbenig met top A als en slechts als

$$\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=S(\alpha).$$

□ We hebben

$$2\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}=\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\cos\frac{\beta+\gamma}{2}$$

en omdat $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ dus

$$2\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}=\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Volgens stelling 3 is de driehoek ABC dus schijnbaar gelijkbenig met top A als en slechts als

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2}=\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Gelet op F1 volgt hieruit het gestelde. □

F2 : Voor elke $\beta\in\mathbb{R}$ noemen we T_β de transformatie van $\mathbb{R}$, bepaald door

$$T_\beta(x)=S(x)-\sin\left(\frac{x}{2}+\beta\right) \quad \text{voor alle } x\in\mathbb{R}.$$

Stelling 5

De driehoek ABC is schijnbaar gelijkbenig met top A als en slechts als $T_\beta(\alpha)=0$.

□ Omdat $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ hebben we

$$\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{\alpha}{2}+\beta-\frac{\pi}{2},$$
$$\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right).$$

Volgens stelling 4 is de driehoek ABC dus schijnbaar gelijkbenig met top A als en slechts als

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)=S(\alpha).$$

Met behulp van F2 volgt hieruit het gestelde. □

Hulpstellingen

Het ligt in onze bedoeling om aan te tonen dat schijnbaar gelijkbenige driehoeken wel degelijk bestaan. Meer bepaald willen we de existentie bespreken van een schijnbaar gelijkbenige driehoek met een gegeven hoek. Daartoe hebben we echter een aantal eigenschappen van de functies S en T_β nodig, die we nu eerst behandelen als hulpstellingen.

H1 : De functie S is strikt stijgend in $[0\,,\pi]$.

H2 : $S(0)=0$.

H3 : $S\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$.

□ Deze uitspraken volgen meteen uit F1, $\sin 0=0$ en $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$. □

H4 : Als $x\in\left]0\,,\frac{\pi}{3}\right[$, dan $\sin\frac{x}{2}<S(x)<\sin\frac{3x}{2}$.

H5 : Als $x\in\left]\frac{\pi}{3}\,,\pi\right[$, dan $S(x)>\sin\frac{3x}{2}$.

H6 : Als $x\in\left]0\,,\pi\right[$ en $S(x)=\sin\frac{3x}{2}$, dan $x=\frac{\pi}{3}$.

□ Laat $x\in\left]0\,,\pi\right[$. Uit F1 en de gelijkheid $\sin\frac{3x}{2}=3\sin\frac{x}{2}-4\sin^3\frac{x}{2}$ volgt dat

$$\begin{aligned}S(x)-\sin\frac{3x}{2}&=4\sin^3\frac{x}{2}+2\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\\&=2\sin\frac{x}{2}+\left(\sin\frac{x}{2}+1\right)\left(2\sin\frac{x}{2}-1\right).\end{aligned}$$

Hiermee blijken :

$$x < \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad 0 < \sin\frac{x}{2} < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad S(x) < \sin\frac{3x}{2} \ ,$$
$$x > \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \sin\frac{x}{2} > \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad S(x) > \sin\frac{3x}{2}$$

Uit F1 volgt daarbij nog dat

$$\sin\frac{x}{2} < S(x).$$

Daarmee zijn H4 en H5 bewezen.

En H6 is een onmiddellijk gevolg daarvan. □

H7 ; Als $\beta, x \in \mathbb{R}$, dan $T_\beta(x) = 1 - \cos x - 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{x+\beta}{2}.$

H8 ; Als $\beta, x \in \mathbb{R}$, dan $T_\beta{}'(x) = \sin x + \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{x+\beta}{2}.$

□ We hebben

$$T_\beta(x) = 2\sin^2\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} - \sin\left(\frac{x}{2} + \beta\right) \quad \text{(zie F1, F2),}$$

$$\sin\frac{x}{2} - \sin\left(\frac{x}{2} + \beta\right) = -2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{x+\beta}{2} \ ,$$

$$2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x \ ,$$

wat H7 oplevert.

En uit H7 volgt zonder meer ook H8. □

H9 : Laat $\beta \in \left]0\, , \pi\right[$. De functie T_β is strikt stijgend in $[0\, , \pi]$.

H10 : Laat $\beta \in \left]0\, , \pi\right[$. De afgeleide functie $T_\beta{}'$ is strikt stijgend in $[0\, , \pi - \beta]$.

H11 : Als $\beta \in \left]0\, , \pi\right[$ en $x \in \left]0\, , \pi - \beta\right]$, dan $T_\beta{}'(x) > \sin^2\frac{\beta}{2}.$

□ We steunen op H7 en H8.

T_β is continu en $T_\beta{}'(x) > 0$ voor alle $x \in \left]0\, , \pi\right[$. Hieruit volgt H9.

De afgeleide functie $T_\beta{}'$ is continu en als $x \in \left]0\, , \pi - \beta\right[$, dan

$$T_\beta{}''(x) = \cos x + \frac{1}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{x+\beta}{2} > 0.$$

Hieruit volgt H10.

Ten slotte volgt H11 uit H10 en de gelijkheid

$$T_\beta{}'(0) = \sin^2 \frac{B}{2}. \ \square$$

H12 : Laat $\beta \in \left]0\,,\pi\right[$. De functie T_β heeft precies één nulpunt in $\left]0\,,\pi-\beta\right[$. Als α dit nulpunt is, $\gamma = \pi - \alpha - \beta$ en $\beta \neq \frac{\pi}{3}$, dan $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$.

$\square$ Uit H7 volgt dat T_β continu is en dat

$$T_\beta(0) = -2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} < 0,$$
$$T_\beta(\pi-\beta) = 1 + \cos\beta > 0.$$

Bijgevolg heeft T_β een nulpunt in $\left]0\,,\pi-\beta\right[$ (wegens de stelling van Bolzano, zie blz. 53).
Bovendien kan T_β niet meer dan één nulpunt in $\left]0\,,\pi-\beta\right[$ hebben wegens H9.
Laat α nu het nulpunt van T_β in $\left]0\,,\pi-\beta\right[$ zijn en $\gamma = \pi - \alpha - \beta$.

Onderstel dat $\beta \neq \frac{\pi}{3}$.

- Uit F2 en H6 volgt dat

  $$T_\beta(\beta) = S(\beta) - \sin\frac{3\beta}{2} \neq 0.$$

  Omdat $T_\beta(\alpha) = 0$, moet dus $\alpha \neq \beta$.

- Onderstel dat $\beta = \gamma$, zodat $\alpha = \pi - 2\beta$ en $T_\beta(\pi - 2\beta) = 0$.

  We hebben

  $$\begin{aligned} T_\beta(\pi-2\beta) &= 1 + \cos 2\beta - 2\sin^2\frac{\beta}{2} \quad \text{(zie H7)} \\ &= \cos\beta + \cos 2\beta \\ &= 2\cos\frac{3\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}, \end{aligned}$$

  dus $T_\beta(\pi-2\beta) \neq 0$ omdat $0 < \beta < \pi$ en $3\beta \neq \pi$.
  Deze tegenspraak bewijst dat $\beta \neq \gamma$.

- Ware $\gamma = \alpha$, dan zou $\beta = \pi - 2\alpha$, dus

  $$T_\beta(\alpha) = S(\alpha) - \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \pi - 2\alpha\right) \quad \text{(F2)}$$
  $$0 = S(\alpha) - \sin\frac{3\alpha}{2},$$
  $$\alpha = \frac{\pi}{3} \quad \text{(zie H6)},$$
  $$\beta = \pi - 2\alpha = \frac{\pi}{3},$$

wat in strijd is met het ondersteelde.

Dus $\gamma \neq \alpha$.

Hiermee is H12 volledig bewezen. □

H13 : Laat $\beta \in \left]0\,,\pi\right[$. De formules

$$x_0 = \pi - \beta\,,\ x_{k+1} = x_k - \frac{T_\beta(x_k)}{T_\beta{}'(x_k)} \quad \text{Voor elke } k \in \mathbb{N}$$

bepalen een dalende rij $(x_k \mid k \in \mathbb{N})$, die naar het enige nulpunt van T_β in $\left]0\,,\pi-\beta\right[$ convergeert.

□ Dit volgt uit H9, H10, H11, H12 en een bekende stelling in verband met de iteratieve methode van Newton voor het oplossen van vergelijkingen. □

Ter afkorting voeren we nog twee uitdrukkingen in.

F3 : Voor alle $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{3}\right]$ stellen we

$$L(x) = \frac{\pi - x}{2} - \arccos S(x)\,,$$

$$M(x) = \frac{\pi - x}{2} + \arccos S(x)\,.$$

Hierbij merken we op : als $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{3}\right]$, dan behoort $S(x)$ tot $[0\,,1]$ (zie H1, H2, H3) en dus zeker tot het domein $[-1\,,1]$ van de cyclometrische functie arccos.

H14 : Als $x \in \left]0\,,\frac{\pi}{3}\right[$, dan $0 < L(x) < x < \frac{\pi}{3} < M(x)$.

□ Laat $x \in \left]0\,,\frac{\pi}{3}\right[$.

Uit H1 en H4 volgt dat

$$\arccos\left(\sin\frac{x}{2}\right) > \arccos S(x) > \arccos\left(\sin\frac{3x}{2}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\arccos\left(\cos\frac{\pi - x}{2}\right) > \arccos S(x) > \arccos\left(\cos\frac{\pi - 3x}{2}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\pi - x}{2} > \arccos S(x) > \frac{\pi - 3x}{2}\,,$$

zodat $0 < L(x) < x$ (zie F3).

Er valt nog aan te tonen dat $M(x) > \dfrac{\pi}{3}$.

Welnu

$$S(x) < S\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \quad \text{(zie H1, H2),}$$

$$\arccos S(x) > 0\ ,$$

$$M(x) > \frac{\pi - x}{2} \quad \text{(zie F3), dus } M(x) > \frac{\pi - \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{3}.\ \square$$

Schijnbaar gelijkbenige driehoeken met een gegeven hoek

Als $r, s \in \mathbb{R}$, dan is $\inf(r\ ,\ s)$ het kleinste element van $\{r\ ,\ s\}$ en $\sup(r\ ,\ s)$ het grootste element van $\{r\ ,\ s\}$.

Stelling 6

Onderstel dat een positieve driehoek ABC schijnbaar gelijkbenig met top A is en hoeken $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle CBA$, $\gamma = \angle ACB$.

6.1 $\alpha \in \left]0\ ,\ \dfrac{\pi}{3}\right[$,

6.2 $\inf(\beta\ ,\ \gamma) = L(\alpha)$,

6.3 $\sup(\beta\ ,\ \gamma) = M(\alpha)$.

□ Stel $\lambda = \inf(\beta\ ,\ \gamma)$, $\mu = \sup(\beta\ ,\ \gamma)$.

Gelet op $\mu - \lambda = |\beta - \gamma|$ en stelling 4 hebben we

(i) $\cos\dfrac{\mu - \lambda}{2} = \cos\dfrac{\beta - \gamma}{2} = S(x)$.

De driehoek ABC is ongelijkbenig, zodat $\beta \neq \gamma$ en dus $\lambda < \mu$.

Daarbij hebben we $\beta, \gamma \in \left]0\ ,\ \pi\right[$, zodat $0 < \lambda < \mu < \pi$ en dus

(ii) $0 < \mu - \lambda < \pi$.

Uit (i) en (ii) volgen

(iii) $0 < S(\alpha) < 1$,

(iv) $\dfrac{\mu - \lambda}{2} = \arccos S(\alpha)$.

Bovendien hebben we

(v) $$\frac{\mu+\lambda}{2}=\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi-\alpha}{2}.$$

Uit (iii) en H1, H2, H3 volgt 6.1.

Uit (iv), (v) en F3 volgen 6.2 en 6.3. □

Stelling 7

Als $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[$, dan bestaat er een positieve driehoek ABC die schijnbaar gelijkbenig met top A is en waarin $\widehat{BAC}=\alpha$.

□ Laat $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[$, $\beta = L(\alpha)$ en $\gamma = M(\alpha)$.

Volgens F3 hebben we

$$\beta=\frac{\pi-\alpha}{2}-\arccos S(\alpha) \text{ en } \gamma=\frac{\pi-\alpha}{2}+\arccos S(\alpha). \quad (^\circ)$$

Hieruit volgt dat $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

Daarbij hebben we $0<\beta<\alpha<\gamma$ (zie H14).

Bijgevolg bestaat er een ongelijkbenige positieve driehoek ABC, zodanig dat $\widehat{BAC}=\alpha$, $\widehat{CBA}=\beta$ en $\widehat{ACB}=\gamma$.

Uit de gelijkheden ($^\circ$) volgt bovendien dat $\beta-\gamma=-2\cdot\arccos S(\alpha)$, zodat

$$\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=S(\alpha)$$

en de driehoek ABC dus schijnbaar gelijkbenig met top A is (zie Stelling 4). □

Stelling 8

Als $\beta \in \left]0, \pi\right[$ en $\beta \neq \frac{\pi}{3}$, dan bestaat er een positieve driehoek ABC, die schijnbaar gelijkbenig met top A is en waarin $\widehat{CBA}=\beta$.

□ Noem α het nulpunt van T_β in $\left]0, \pi-\beta\right[$ (zie H12) en stel $\gamma=\pi-\alpha-\beta$.

Omdat $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ en $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$ bestaat er een positieve driehoek ABC, zodanig dat $\widehat{BAC}=\alpha$ en $\widehat{CBA}=\beta$.

Uit H12 volgt dat deze driehoek ABC ongelijkbenig is en uit Stelling 5 volgt dat die driehoek ABC schijnbaar gelijkbenig met top A is. □

Voorbeeld

Volgens Stelling 8 bestaat een positieve driehoek ABC, die schijnbaar gelijkbenig is met top A en die bovendien rechthoekig in B is.

In deze driehoek hebben we

$$\widehat{CBA} = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}5707963268\ ,$$

$$\widehat{BAC} \approx 0{,}9591533687 \quad \text{(met behulp van H13)},$$

$$\widehat{ACB} = \pi - \widehat{BAC} - \widehat{CBA} \approx 0{,}6116429581.$$

Ik vond de definitie van 'schijnbaar gelijkbenige driehoek' in een oude lijst van schoolopgaven, waarvan de herkomst niet te achterhalen viel.

Collega René Laumen deelde me het volgende mee. In het "Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1925, blz. 126" geeft professor G. Cesaro een praktische benaderde constructie van de regelmatige 18-hoek en legt uit hoe de studie van de schijnbaar gelijkbenige driehoeken hem op het denkbeeld van zijn constructie bracht.

Prof. G. Cesaro was hoogleraar aan de Universiteit van Luik.

Jos De Schryver
Daalbos 52,
9290 Berlare.

Bernhard Bolzano (° 5 oktober 1781, Praag - † 18 december, Praag)

Tsjechisch (Oostenrijks) wijsgeer. Hij studeerde theologie, filosofie en wiskunde. Bezette vanaf 1807 een nieuw gestichte leerstoel voor godsdienstfilosofie aan de universiteit van Praag. In 1819 werd hij omwille van zijn progressief denken op politiek en religieus gebied afgezet. Vanwege een publiceerverbod, verschenen zijn werken anoniem of in het buitenland. Zijn wiskundig werk geniet groot aanzien, omdat hij tot de pioniers van het grondslagenonderzoek behoort. Daarin heeft hij bijgedragen tot die aritmetisering der wiskunde die met de naam Weierstrass verbonden is. Bolzano's werk is eerst na zijn dood als belangrijk erkend ; verscheidene van zijn geschriften zijn in vorige eeuw uitgegeven : *Functionenlehre* (1930) en *Zahlentheorie* (1931).

Stelling van Bolzano :

Is de functie f continu over het gesloten interval $[a\ ,b]$ en $f(a)\cdot f(b) < 0$, dan heeft f minstens een nulpunt in het open interval $]a\ ,b[$.
