Leren leven met grote getallen

Luc Gheysens

Het is merkwaardig om vast te stellen hoe moeilijk we grote getallen kunnen inschatten. Veronderstel dat iemand je vraagt om alle natuurlijke getallen van 1 tot en met 1 miljoen op papier neer te schrijven, ermee rekening houdend dat je één cijfer per seconde kunt opschrijven en dat je bereid bent om 8 uur per dag hieraan te werken. In hoeveel tijd denk je dit klusje te kunnen klaren ? Een dag, een paar dagen, een week... ?

Om deze vraag te beantwoorden berekenen we eerst hoeveel cijfers je in totaal zult moeten opschrijven :

Van 1 tot en met 9 :	9×1	=	9 cijfers
van 10 tot en met 99 :	90×2	=	180 cijfers
van 100 tot en met 999 :	900×3	=	2700 cijfers
van 1000 tot en met 9999 :	9000×4	=	36000 cijfers
van 10000 tot en met 99999 :	90000×5	=	450000 cijfers
van 100000 tot en met 999999 :	900000×6	=	5400000 cijfers
voor 1000000 :	1×7	=	7 cijfers
	totaal	=	5888896 cijfers

In 8 uur gaan er $8 \times 60 \times 60 = 28800$ seconden, zodat aan een werkritme van 8 uur per dag het schrijfwerk $5888896 : 28800$ of ongeveer 205 dagen zou duren !

Sedert de ontwikkeling van de computer worden we regelmatiger geconfronteerd met gigantisch grote getallen. Kilobytes zijn al prehistorie ; nu heeft men het voorlopig nog over megabytes (MB) en gigabytes (GB) en straks wellicht over terabytes (TB).

Een gigabyte is plusminus 1 miljard bytes of 1000 megabyte.

Voor wie het exact wil weten :

1 gigabyte = 1 GB = 1024 megabyte (MB) = 1048576 kilobytes (KB) = 1073741824 bytes

en

1 terabyte = 1 TB = 1024 gigabytes = 1099511627776 bytes.

Via het SI (Système International), het in 1960 ingevoerde internationaal systeem van eenheden, zijn er nog heel wat andere voorvoegsels vastgelegd die ons de garantie bieden dat er de komende jaren nog benamingen in voorraad genoeg zijn voor de toenemende geheugencapaciteit van computers :

Voor-voegsel	Af-korting	SI-waarde	Reële waarde
-	-	1	$2^0 = 1$
kilo	k	1000	$2^{10} = 1024$
mega	M	1000000	$2^{20} = 1048576$
giga	G	1000000000	$2^{30} = 1073741824$
tera	T	1000000000000	$2^{40} = 1099511627776$
peta	P	1000000000000000	$2^{50} = 1125899906842624$
exa	E	1000000000000000000	$2^{60} = 1152921504606846976$
zetta	Z	1000000000000000000000	$2^{70} = 1180591620717411303424$
yotta	Y	1000000000000000000000000	$2^{80} = 1208925819614629174706176$

Waar komen de benamingen vandaan ?

- kilo : Grieks χίλιοι (khilioi) wat ‘duizend’ betekent
- mega : Grieks μέγας (megas) wat eenvoudig ‘groot’ betekent
- giga : Grieks γίγας (gigas) met betekenis ‘geweldig, reusachtig’, denk aan gigant
- tera : Grieks τέρας (teras) : wonderlijk , monsterachtig (groot)
- peta : van πέντε (= penta), betekent ‘vijf’ = 1000^5
- exa : van ἕξ (= hex) voor zes = 1000^6
- zetta: van het Latijn ‘septem’ betekent ‘zeven’ = 1000^7 , de benaming ‘hepta’, Grieks ἑπτά (hepta) werd officieel niet aanvaard
- yotta: zou van ὀκτώ (octo) voor acht komen = 1000^8

Het getal 10^{100} schrijft men als 1 gevolgd door 100 nullen en heeft in de wiskunde de naam **googol** gekregen. De naam is wellicht in 1938 aan dit getal gegeven door Milton Sirotta, toen 9 jaar oud, neefje van de Amerikaanse wiskundige Edward Kasner (1878 - 1955). De internet-zoekmachine Google is genoemd naar dit getal.

Het getal $10^{10^{100}}$ (tien tot de macht googol) kreeg de naam **googolplex.** Het is gelijk aan 1 gevolgd door googol nullen**.** Niemand zal er ooit in slagen dit getal voluit te schrijven. Niet enkel is er hiervoor onvoldoende tijd, maar er is ook onvoldoende materie in het heelal om het volledig uit te schrijven.

De paradox van het aantal voorouders

Je hebt twee ouders, die elk weer twee voorouders hebben, die op hun beurt elk twee voorouders hadden... Als we rekenen dat er per eeuw drie generaties hebben geleefd, dan komen we zo voor de voorbije 20 eeuwen op 60 generaties. Dit betekent dat je bij het begin van onze jaartelling 2^{60} of ongeveer 10^{18} voorouders had.

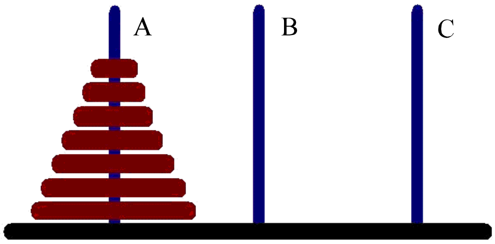
$10^{18} = 1\,000000\,000000\,000000$ = 1 triljoen.

Dit is duidelijk meer dan het aantal mensen dat er ooit op onze aardbol leefde. Hoe kan dat ???

Machten van 2

Wanneer je de opeenvolgende machten van twee opschrijft, dan krijg je de indruk dat de rij getallen op 'een controleerbare' manier aangroeit. Niets is echter minder waar. Dit blijkt uit een drietal probleempjes die in heel wat wiskundehandboeken opduiken.

De torens van Hanoi



Bij dit spelletje moet je een aantal schijven met een verschillende diameter van het linkse stokje A naar het rechtse stokje C verplaatsen. Hierbij kan het middelste stokje B als tussenstation worden gebruikt. Maar je mag nooit een grotere schijf bovenop een kleinere plaatsen en bij elke zet mag je slechts één schijf verplaatsen. Voor 3 schijven kun je de klus in $2^3 - 1 = 7$ zetten klaren en voor 8 schijven heb je al $2^8 - 1 = 255$ zetten nodig.

Het spel is uitgevonden door de Franse wiskundige Edouard Lucas in 1883. Er is zelfs een legende verbonden over een hindoetempel in de Indiase stad Benares waar de priesters, de Brahmanen, de opdracht kregen 64 gouden schijven te verplaatsen van één zuil naar een andere, waarbij ze eveneens van een derde zuil als tussenstation konden gebruik maken. En volgens de legende zal de wereld vergaan als het werk voltooid is ! Als we nu aannemen dat de priesters 1 schijf per seconde verplaatsen, duurt het ongeveer $2^{64} - 1$ ongeveer $1{,}8 \times 10^{19}$ seconden om de opdracht te vervullen. Dit komt overeen met ongeveer 580000000000 jaar... ongeveer veertig maal langer dan de geschatte leeftijd van het heelal !

Graankorrels op een schaakbord

Toen Sissa ben Dahir het schaakspel had uitgevonden, was koning Hindoe Shirham zo enthousiast dat hij Sissa zelf de beloning liet bepalen. Hij dacht even na en vroeg: “Sire, geef me één graankorrel voor het eerste vakje van het schaakbord, twee voor het tweede, vier voor het derde, acht voor het vierde, enz. tot het laatste.”

Een schatting hoeveel graankorrels op alle 64 velden samen liggen ?

Het antwoord hierop is $2^{64} - 1$. Geen enkel schaakbord zou in elk geval het gewicht ervan kunnen dragen !

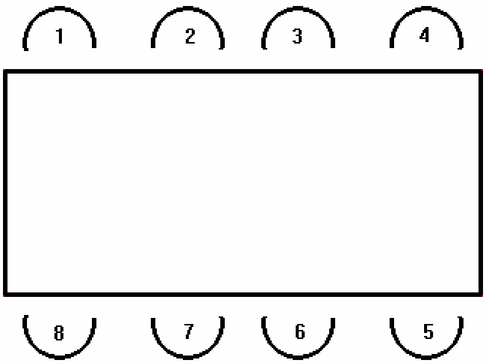
Een blad papier dubbel vouwen

Je beschikt over een enorm groot blad papier van 1 mm dikte. Je vouwt vervolgens dit blad 40 keer na elkaar dubbel. Hou dik zou de stapel dan zijn ?

Het antwoord is : 2^{40} mm of ongeveer 1099510 km. De maan staat gemiddeld op 384000 km van de aarde verwijderd…

Met acht aan tafel

Acht vrienden gaan wekelijks in hetzelfde restaurant dineren. Ze besluiten hiermee door te gaan zolang ze op een andere manier ten opzichte van elkaar aan tafel kunnen plaatsnemen. Hoeveel weken kunnen ze samen blijven dineren ?

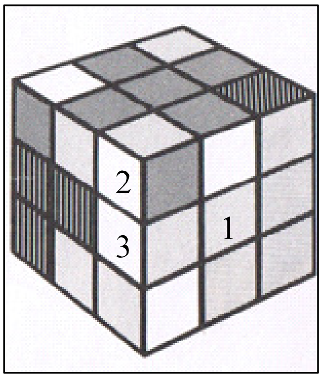


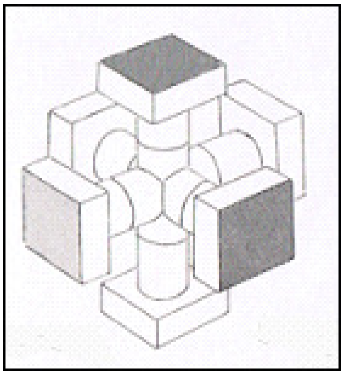
Het antwoord is $8!$ (lees : acht faculteit), wat gelijk is aan het getal $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$.

Ze kunnen ongeveer 775 jaar gezellig blijven genieten van hun wekelijks etentje !

De kubus van Rubik

Begin de jaren ’80 dook plots de zogenaamde kubus van Rubik op, genoemd naar Ernö Rubik, professor, beeldhouwer, ontwerper en architect uit Boedapest.





In hoeveel verschillende standen kun je de kubus draaien ?

Om het probleem op te lossen moet je weten dat de kubus bestaat uit :

- 6 middenkubusjes (cijfer 1 op de linkse figuur hierboven) die onderling aan elkaar vastzitten zoals op de rechtse figuur is voorgesteld ;
- 8 hoekkubusjes (2) met elk drie mogelijke oriëntaties ;
- 12 ribkubusjes (3) met elk twee mogelijke oriëntaties.

Dit levert in principe $8!\cdot 12!\cdot 3^8\cdot 2^{12}$ verschillende standen om.

Om mechanische redenen zijn niet alle situaties mogelijk :

- als 7 hoekkubusjes georiënteerd zijn, ligt de oriëntatie van het 8ste hoekkubusje vast en daarom moet je het aantal delen door 3 ;
- hoekkubusjes en ribkubusjes kunnen slechts per koppel worden verwisseld en daarom moet je het aantal delen door 2 ;
- een nieuwe oriëntatie voor een ribkubusje zorgt automatisch ook voor een nieuwe oriëntatie bij een ander ribkubusje en daarom moet je het aantal delen door 2.

Zo kom je uiteindelijk op $8!\cdot 11!\cdot 3^8\cdot 2^{12} = 43\ 252003\ 274489\ 856000$ of ongeveer 43 triljoen mogelijke standen.

Het is een wonder dat sommige mensen er nog in slagen om de kubus terug te draaien in de oorspronkelijke stand, waarbij de negen vierkantjes op elk zijvlak eenzelfde kleur hebben !

King Kong en de tuinkabouter

King Kong is de legendarische gorilla uit de filmklassieker van 1933. Toch kan King Kong niet echt bestaan hebben. Als de afmetingen van een levend wezen met een factor k toenemen, dan neemt het gewicht normaal gezien met een factor k^3 toe. Het effect hiervan schatten we wellicht een beetje verkeerd in.

Stel immers dat een gorilla van 2 m groot 100 kg weegt, dan zal een gorilla van 20 meter groot $10^3\times 100$ kg wegen of precies 100 ton. De draagkracht van het dijbeen van een gorilla is recht evenredig met het kwadraat van de doorsnede ervan. Als de afmetingen met een factor 10 toenemen, zal de draagkracht slechts met een factor 100 toenemen. Dit is duidelijk niet genoeg om het gewicht van 100 ton te dragen. King Kong zal dus ineenstuiken.

Een analoge redenering zorgt voor problemen in verband met het bestaan van echte tuinkabouters. Als een tuinkabouter 15 cm groot is en een gewicht heeft van 300 gram, dan zou een volwassen mens van 180 cm (dit is 12 keer groter dan de tuinkabouter) een gewicht hebben van $12^3\times 300$ gram en dit is gelijk aan 518,4 kilogram. Niet erg realistisch !

Luc Gheyssens <lucgheyssens@yahoo.com>
pedagogisch adviseur wiskunde
DPB - Brugge.