Algebra's in de algebra : een verkenningstocht (deel 2*)

Dirk Keppens

* Voor deel 1, zie *Wiskunde & Onderwijs* nr.148 blz. 316 - 329.

De algebra is de tak van de wiskunde waarin men structuren bestudeert. Voorbeelden van structuren zijn o.a. semigroepen, groepen, ringen, lichamen, velden, tralies, modulen, vectorruimten, en... algebra's !

Een algebra is dus ook een bijzondere algebraïsche structuur. In een reeds verschenen artikel maakte de lezer kennis met deze fascinerende klasse van structuren. In dit artikel wordt de verkenningstocht verder gezet waarbij we twee belangrijke klassen van niet-associatieve algebra's bespreken.

5. Lie-algebra's

Een zeer belangrijke klasse van *niet-associatieve* algebra's wordt gevormd door de **Lie algebra's**, genoemd naar Sophus Lie, een Noors wiskundige.

Lie algebra's zijn geassocieerd met Lie groepen. Dat zijn continue transformatiegroepen die symmetrieën beschrijven. De algebra's werden door Lie ingevoerd rond 1870 om "infini-tesimale" transformaties te beschrijven.

Onafhankelijk van Lie introduceerde de Duitse wiskundige Wilhelm Killing Lie algebra's in 1884 bij de studie van niet-euclidische meetkunde.

Een algebra A wordt een Lie algebra genoemd indien de vermenigvuldiging $\times$ in A voldoet aan de volgende twee voorwaarden :

$a \times a = o$ voor elke $a \in A$

en

$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = o$ voor alle $a, b, c \in A$.

Deze laatste voorwaarde wordt *identiteit van Jacobi* genoemd.

In elke Lie algebra geldt dat $a \times b = -b \times a$ (men zegt dat de vermenigvuldiging anti-commutatief is).

Als de karakteristiek van het veld $\mathbb{K}$ waarover de Lie algebra wordt beschouwd, niet gelijk is aan 2, dan is de eerste voorwaarde $a \times a = o$ zelfs gelijkwaardig met de anti-commutativiteit van de vermenigvuldiging $\times$.

De vermenigvuldiging in een Lie algebra wordt meestal genoteerd d.m.v. rechte haken (de zogeheten *Lie haak*), dus $[a,b]$ i.p.v. $a\times b$.
Met deze notatie worden de voorwaarden van hierboven :

$[a,a]=o$ en $\left[a,[b,c]\right]+\left[b,[c,a]\right]+\left[c,[a,b]\right]=o.$

Enkele voorbeelden :

De vectorruimte van de meetkundige vectoren in de driedimensionale euclidische ruimte voorzien van het gebruikelijke vectorieel product (zie voorbeeld 2 in deel 1).

De vectorruimte $Mat(n\ ,\ \mathbb{K})$ van alle $n\times n$-matrices met elementen in het veld $\mathbb{K}$ voorzien van het product $[A,B]=AB-BA$.

Het laatste voorbeeld is een bijzonder geval van een meer algemene eigenschap :

Elke associatieve algebra A (dus met associatieve vermenigvuldiging $\times$), geeft aanleiding tot een Lie algebra (met dezelfde onderliggende vectorruimte) wanneer men de vermenigvuldiging vervangt door het zogeheten *Lieproduct* $[a,b]=a\times b-b\times a$ (de commutator onder het vectorproduct in A).

De Lie algebra die men zo uit A bekomt, noteert men als A^- en men noemt deze de *minusalgebra* van A.

Deze algebra wordt in het geval waarbij $A=Mat(n\ ,\ \mathbb{K})$ meestal genoteerd als $\mathsf{gl}(n\ ,\ \mathbb{K})$.

De volgende stelling van **Poincaré-Birkhoff-Witt** toont het belang van de minusalgebra 's A^- :

Elke Lie algebra L is isomorf met een deelalgebra van een algebra A^-.

Een Lie algebra heet *abels* als $[a,b]=o$ voor elk tweetal $a,b\in A$. Een niet-abelse Lie algebra die geen echte idealen bezit, wordt een *enkelvoudige Lie algebra* genoemd.

Eén van de mooiste resultaten van de wiskunde van de 19de eeuw is ongetwijfeld de classificatie van de eindigdimensionale enkelvoudige Lie algebra's over een algebraïsch gesloten veld met karakteristiek 0.

Deze classificatie werd begonnen door Killing en voltooid door de Fransman Elie Cartan, één van de grootste wiskundigen van het begin van de twintigste eeuw.

De **classificatiestelling van Killing-Cartan** zegt dat er vier families van eindig-dimensionale enkelvoudige Lie algebra's zijn over een algebraïsch gesloten veld $\mathbb{K}$ met karakteristiek nul, resp. A_n , B_n , C_n en D_n genoteerd en daarnaast nog vijf uitzonderlijke Lie algebra's, aangeduid met E_6 , E_7 , E_8 , F_4 en G_2.

De vier families zijn :

1. $A_n=\mathsf{sl}(n+1\ ,\ \mathbb{K})$: de *speciale lineaire Lie algebra* van de matrices van de orde $n+1$ met spoor 0 (met het Lieproduct als vermenigvuldiging) voor $n\geq 1$; deze is een deelalgebra van $\mathsf{gl}(n+1\ ,\ \mathbb{K})$.
2. $B_n=\mathsf{so}(2n+1\ ,\ \mathbb{K})$: de *orthogonale Lie algebra* van de anti-symmetrische matrices

$\left(X^T = -X\right)$ van de orde $2n+1$.

3. $C_n = \mathrm{sp}(2n\ ,\ \mathbb{K})$: de *symplectische Lie algebra* van de matrices van de orde $2n$ van de vorm $X^T J + JX = 0$ waarin J de matrix is van een scheef-symmetrische niet-ontaarde bilineaire vorm.
4. $D_n = \mathrm{so}(2n\ ,\ \mathbb{K})$: de *orthogonale Lie algebra* van de anti-symmetrische matrices van de orde $2n$.

Men noemt deze vier klassen van algebra's de **klassieke Lie algebra's**.

De Lie algebra's E_6 , E_7 , E_8 , F_4 en G_2 noemt men de **exceptionele Lie algebra's**.

Figuur 1 : S. Lie (1842 - 1899), W. Killing (1847 - 1923) en E. Cartan (1869 - 1951)

Honderd jaar na de classificatie van de enkelvoudige Lie algebra's over een algebraïsch gesloten veld met karakteristiek nul, werd begonnen met een gelijkaardig project voor algebra's over een algebraïsch gesloten veld met karakteristiek $p \neq 0$. Naast analogen van de klassieke en de exceptionele Lie algebra's in het karakteristiek p geval, bleken er nog andere eindigdimensionale enkelvoudige Lie algebra's te bestaan, zoals de *Jacobson-Witt algebra's*.

De Russen Kostrikin (1929 - 2000) en Šafarevič (1923 -) ontdekten nog andere zulke algebra's (in total vier types) en ze noemden deze de **Cartan-type Lie algebra's** (ze bleken te corresponderen met vier families van oneindigdimensonale complexe Lie algebra's).

Kostrikin en Šafarevič formuleerden in 1966 het vermoeden dat de eindig-dimensionale enkelvoudige Lie algebra's over een algebraïsch gesloten veld met karakteristiek $p > 5$ ofwel klassiek ofwel van het Cartan-type zijn.

In 1988 slaagden Block en Wilson erin dit vermoeden te bewijzen voor $p > 7$. Nog eens tien jaar later werd de volledige classificatie voor $p > 3$ gevonden door Premet en Strade.

Deze **classificatiestelling van Block-Wilson-Premet-Strade** luidt :

Elke eindigdimensionale enkelvoudige Lie algebra over een algebraïsch gesloten veld met karakteristiek p , $p > 3$ is ofwel klassiek, ofwel van het Cartan-type ofwel een Melikian *algebra (bestaat enkel in het geval $p = 5$).*

De classificatie in het geval $p = 2$ en $p = 3$ is vandaag nog steeds niet opgelost.
Maar niet alleen als wiskundige objecten zijn Lie algebra's zo interessant. Ze hebben ook heel veel toepassingen in de theoretische fysica, o.a. in de *snaartheorie* (string theory) waarin men tracht een quantumtheoretische beschrijving van de gravitatie te geven. De wisselwerking tussen wiskunde en fysica is dan ook groot in dit gebied. Fysici hebben soms nood aan nieuwe wiskundige structuren en dat stimuleert het wiskundig onderzoek terwijl omgekeerd bestaande wiskundige structuren soms onverwacht toepassingen in de fysica blijken te hebben.

Als voorbeeld vermelden we de **Kac-Moody algebra's**, een klasse van oneindig dimensionale Lie algebra's. Deze bleken van groot belang in de conforme veldentheorie (fysica), maar kregen ook een nieuw leven in de wiskunde waar ze werden geassocieerd met twin buildings (gebouwentheorie, onderdeel van incidentiemeetkunde).

Een veralgemening van Lie algebra's zijn de **Malcev algebra's** ingevoerd door Anatoly Malcev in 1955 onder de benaming Moufang-Lie algebra.

Een algebra A heet een Malcev algebra wanneer de vermenigvuldiging voldoet aan de anticommutativiteit

$$xy = -yx$$

en aan de *Malcev identiteit*

$$(xy)(xz) = ((xy)z)x + ((yz)x)x + ((zx)x)y.$$

Elke Lie algebra is een bijzondere Malcev algebra.

Wanneer men start bij een niet-associatieve, maar alternatieve algebra A, dan bekomt men hieruit een Malcev algebra A^-.

Het is niet geweten of iedere Malcev algebra isomorf is met een deelalgebra van zulk een A^- naar analogie met de Lie algebra's.

Figuur 2 : A. Malcev (1909 - 1967)

6. Jordan-algebra's

Naast de Lie algebra's vormen de **Jordan algebra's** een andere interessante klasse van niet-associatieve algebra's.
Deze klasse van algebra's werd ingevoerd door de Duitse fysicus Pascual Jordan (1902 - 1980), niet te verwarren met de Franse wiskundige Camille Jordan (1838 - 1922) (bekend om zijn werk over matrices (o.a. Jordannormaalvorm van matrices) of met de Duitse landmeter Wilhelm Jordan (1842 - 1899) die de eliminatiemethode van Gauss-Jordan invoerde.

In het gebruikelijk wiskundig model voor de quantumfysica worden de observeerbare fysische grootheden voorgesteld door complexe hermitische matrices (of hermitische lineaire operatoren op een complexe Hilbertruimte). Jordan vond het onaanvaardbaar dat de algebraïsche structuur gebaseerd was op een product dat zelf geen observeerbare grootheid was (het product van twee hermitische matrices is niet noodzakelijk opnieuw hermitisch, tenzij de matrices commuteren)). Daarom startte hij in 1932 een zoektocht naar nieuwe algebraïsche structuren waarin het product wél observeerbaar was (en zelfs niet was afgeleid van een niet-observeerbaar product).

Een algebra A heet een **Jordan algebra** indien de vermenigvuldiging in A (we noteren deze hieronder met $*$) voldoet aan de volgende twee voorwaarden

$a * b = b * a$ voor alle $a, b \in A$ (A is commutatief)

en

$\left(a^2 * b\right) * a = a^2 * (b * a)$ voor alle $a, b \in A$ (de identiteit van Jordan).

Uit de 2de voorwaarde volgt dat de vermenigvuldiging in een Jordan algebra steeds machtassociatief is, d.w.z. dat bij een vermenigvuldiging waarin de factoren alle dezelfde zijn, associativiteit geldt.

Drie klassen van voorbeelden :

1. Elke associatieve algebra A over een veld $\mathbb{K}$ met kar $\mathbb{K} \neq 2$ geeft aanleiding tot een Jordan algebra (met dezelfde onderliggende vectorruimte) wanneer men de vermenigvuldiging vervangt door het zogeheten *Jordanproduct* $a * b = \frac{1}{2}(ab + ba)$ (de anticommutator onder het vectorproduct in A dat we hier zonder bewerkingsteken noteren).

   De Jordan algebra die men aldus uit A bekomt, noteert men als A^+ en noemt men ook een *volle Jordan algebra*.

2. Zij A een associatieve algebra met een involutie j.

   De deelverzameling van alle elementen die gefixeerd worden door j vormt dan een deelalgebra van A^+ die men noteert als $H(A\,,\,j)$ en die een *hermitische Jordan algebra* wordt genoemd.

   Als $A = Mat(n\,,\,\mathbb{K})$ met σ een involutie (toevoeging) van een lichaam $\mathbb{K}$ (denk bijvoorbeeld aan de complexe toevoeging als het veld $\mathbb{C}$ is), dan is toegevoegd transponeren $\left(j(X) = (\sigma(X))^T\right)$ een involutie van A en dan is $H(A\,,\,j)$ in dit geval de algebra van de "hermitische" matrices van de orde n over $\mathbb{K}$ (met als product het Jordan product), genoteerd als $\mathcal{H}_n(\mathbb{K})$.

3. Het eerste voorbeeld van een Jordan algebra die geen volle en geen hermitische Jordan algebra is, werd gevonden door Max Zorn. Het is de algebra $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}^n$ waarin de elementen van $\mathbb{R}1$ als scalairen werken en de elementen van $\mathbb{R}^n$ als vectoren en met als vermenigvuldiging $v * w = < v, w > 1$ waarin $< , >$ het inproduct is in $\mathbb{R}^n$.

   Zulk een Jordan algebra wordt een *Jordan spin factor* genoemd, notatie $JSpin_n$ (benaming afkomstig uit de fysica omdat deze algebra connecties heeft met de spingroep die rotaties beschrijft in n dimensies).

   Men kan aantonen dat $JSpin_n$ kan worden beschouwd als een deelalgebra van de hermitische Jordan algebra $\mathcal{H}(A, j)$ met $A = Mat(2^n, \mathbb{R})$ en j toegevoegd transponeren.

In tegenstelling tot Lie algebra's waar de stelling van Poincaré-Birkhoff-Witt zegt dat alle Lie algebra's kunnen beschouwd worden als deelalgebra's van algebra's A^- bekomen uit een associatieve algebra, zijn niet alle Jordan algebra's te beschouwen als deelalgebra's van een zekere A^+.

De Jordan algebra's waarvoor dat wel geldt noemt men **speciale Jordan algebra's** en de andere heten **exceptionele Jordan algebra's**.

De drie klassen van voorbeelden hierboven zijn alle speciale Jordan algebra's.

Omdat de vermenigvuldiging van de speciale Jordan algebra's wordt bekomen uit de gewone associatieve vermenigvuldiging (die fysisch niet observeerbaar is), was Jordan op zoek naar exceptionele Jordan algebra's.

Naast de twee voorwaarden van het product (commutativiteit en identiteit van Jordan), werd nog een derde voorwaarde toegevoegd : een algebra wordt **euclidisch** of **formeel reëel** genoemd wanneer een som van n kwadraten slechts nul kan zijn als alle termen afzonderlijk nul zijn (voorwaarde van positiviteit).

Figuur 3 : P. Jordan (1902 - 1980), J. von Neumann (1903 - 1957) en E. Wigner (1902 - 1995)

Met de hulp van twee andere onderzoekers slaagt Jordan erin om alle eindigdimensionale formeel reële Jordan algebra's te classificeren. Dat is de stelling van **Jordan-von Neumann-Wigner** :

Elke eindigdimensionale formeel reële Jordan algebra is een directe som van een eindig aantal enkelvoudige Jordan algebra's. Deze enkelvoudige Jordan algebra's zijn ofwel de hermitische algebra's $\mathcal{H}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{H}_n(\mathbb{H})$, *(* $n \times n$ *hermitische matrices resp. over de reële getallen* $\mathbb{R}$ *, over de complexe getallen* $\mathbb{C}$ *over de quaternionen* $\mathbb{H}$ *) ofwel de spinfactoren* $JSpin_n$ *ofwel de algebra* $\mathcal{H}_3(\mathbb{O})$ *van de* 3×3 *hermitische matrices over de niet-associatieve delingsalgebra van de octonionen (zie verder).*

Al de enkelvoudige Jordan algebra's uit bovenstaande stelling zijn speciale Jordan algebra's (dus op te vatten als deelalgebra's van een A^+) behalve de laatste.

A. A. Albert (1905 - 1972) toonde aan dat $\mathcal{H}_3(\mathbb{O})$ een exceptionele algebra is van dimensie 27. Deze algebra wordt daarom ook de **Albert algebra** genoemd.

Na deze bevindingen waren Jordan en andere fysici sterk ontgoocheld want ze hadden gehoopt om een geschikte klasse van exceptionele algebra's – dus met een product niet afgeleid van een (niet-waarneembaar) associatief product – te vinden waarmee ze de quantumfysica beter wiskundig konden modelleren dan met het bestaand model met hermitische matrices.

De Albert algebra was de enige algebra die voldeed, maar deze was te "klein" en te "uitzonderlijk" om als model te dienen. De fysici verloren dan ook hun interesse in Jordan algebra's, maar de wiskundigen niet, zeker niet toen men ontdekte dat er interessante verbanden bestaan tussen de Albert algebra en de exceptionele Lie algebra's. Men ging de Jordan algebra's daar-om grondig bestuderen (waarbij de eis van positiviteit werd weggelaten) en rond 1940 bewezen Albert en Nathan Jacobson een classificatiestelling voor eindigdimensionale Jordan algebra's over een algebraïsch gesloten veld met karakteristiek $\neq 2$ analoog aan de Jordan-von Neumann-Wigner classificatiestelling.

Vervolgens werden Jordan algebra's over algemene velden bestudeerd in het eindigdimensionaal geval. Belangrijke bijdragen daartoe werden o.a. geleverd door de Amerikanen Nathan Jacobson en Kevin McCrimmon die een classificatie bekwamen analoog aan die van Jordan-von Neumann-Wigner.

Nadat von Neumann tevergeefs had geprobeerd om eindigdimensionale exceptionele Jordan algebra's te vinden, kwam er in de jaren `80 een definitief antwoord op een aantal open vragen. In 1979 slaagde de Rus Efim Zel'manov erin om te bewijzen dat er ook in het oneindigdimensionaal geval geen andere exceptionele Jordan algebra's bestaan buiten het analogon van de Albert algebra. Meteen kwam er een definitief einde aan de lang gekoesterde hoop op een nieuw algebraïsch model voor de quantumfysica. Zel'manov kon ook een volledige classificatie geven van alle Jordan algebra's in het oneindigdimensionaal geval.

Classificatiestelling van Zel'manov :

Elke oneindigdimensionale Jordan algebra is een directe som van enkelvoudige Jordan algebra's. Deze enkelvoudige algebra's zijn ofwel van hermitisch type $\mathcal{H}(A, j)$ *met* A *een associatieve algebra met involutie* j *(hierin zit ook de volle algebra* A^+ *voor* j *de identieke transformatie), ofwel van kwadratische factortype* $Jord(Q, c)$ *(ook Clifford type genoemd) met* Q *een niet-ontaarde kwadratische vorm over een veld ofwel van Albert type* $Jord(N, c)$ *met* N *een kubische vorm.*

Overigens is Zel'manov (die nu werkzaam is in de Verenigde Staten) één van de grootste wiskundigen van de twintigste eeuw, niet alleen voor zijn baanbrekend werk over non-associatieve algebra's, maar ook omdat hij het beperkte Burnside probleem uit de groepentheorie oploste, waarvoor hij in 1994 de Fields medaille ontving, de hoogste wiskundige onderscheiding, vergelijkbaar met een Nobelprijs.

Figuur 4 : E. Zel'manov (1955 -) en N. Jacobson (1910 - 1999)

7. Slotbeschouwing

Algebra's vormen één van de vele klassen van algebraïsche structuren. Uit het voorgaande is duidelijk geworden dat deze veel bestudeerde structuren een belangrijke plaats innemen in de zuivere wiskunde, maar ook in de theoretische fysica.

En dan hebben we het nog maar enkel gehad over de *zuiver algebraïsche* algebra's. Daarnaast zijn er ook algebra's die bijkomende metrische of topologische eigenschappen bezitten. Ook deze vormen een rijk onderzoeksgebied. Denken we maar aan Banach-algebra's, C^*-algebra's, ...

En dan zijn er nog de algebra's over commutatieve ringen i.p.v. over velden (modulen i.p.v. vectorruimten met een vermenigvuldiging). Het onderzoek daarvan is nog verre van afgerond !

Bibliografie

1. **J. Baez**, *The octonions*, Bull. Amer. Math. Soc. 39 (2002), 145 - 205.
2. **N. Jacobson**, *Basic Algebra I*, Freeman, San Francisco, 1974.
3. **N. Jacobson**, *Lie Algebras*, Dover Publications, 1979.
4. **D. Lewis**, *Quaternion algebras and the algebraic legacy of Hamilton's quaternions*, Irish. Math. Soc. Bulletin 57 (2006), 41 - 64.
5. **K. McCrimmon**, *A taste of Jordan Algebras*, Springer, Heidelberg-Berlijn-New York, 2004.

6. **R. Schafer**, *An introduction to non-associative algebras*, Academic Press, 1969.

7. **The MacTutor History of Mathematics archive**
op het web (http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk).

8. **Wikipedia**,
de vrije encyclopedie op het web (http://en.wikipedia.org).

Dirk Keppens <dirk.keppens@kahosl.be>
Katholieke Hogeschool Sint-Lieven
Departement Industrieel Ingenieur
vakgroep wiskunde-fysica-statistiek

Bewijs van de Stelling van Stewart

Stelling

Zie blz. 8 in dit nummer.

Bewijs

1. X is een punt op de zijde $[AB]$.

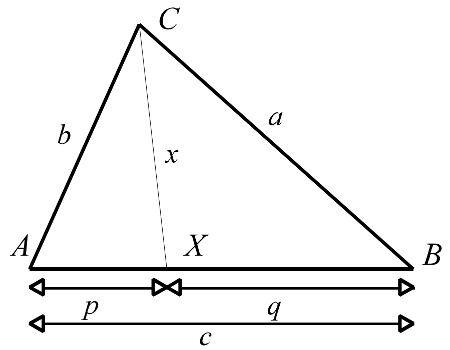
We passen twee keer de cosinusregel toe :

in $\Delta\ AXC$: $x^2 = b^2 + p^2 - 2bp\cos\hat{A}$

in $\Delta\ ABC$: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$

Eliminatie van $\cos\hat{A}$ uit deze vergelijkingen geeft :

$$x^2c - a^2p = b^2c - b^2p + p^2c - c^2p$$
$$x^2c - a^2p = b^2(c-p) - cp(c-p)$$
$$x^2c - a^2p = b^2q - cpq$$
$$x^2c = a^2p + b^2q - cpq.$$



2. X ligt op het verlengde van de zijde $[AB]$.

Als $a > b$, dan passen we het hierboven gevondene toe in driehoek AXC :

$$a^2p = x^2c + b^2q - pcq$$

of

$$x^2c = a^2p - b^2q + cpq.$$